

Let $c_2Earithmetic_2E_2B : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Earithmetic_2E_2B \in ((ty_2Enum_2Enum^{ty_2Enum_2Enum})^{ty_2Enum_2Enum}) \quad (6)$$

Definition 7 We define $c_2Earithmetic_2EBIT1$ to be $\lambda V0n \in ty_2Enum_2Enum.(ap (ap c_2Earithmetic_2E_2B))$

Definition 8 We define $c_2Earithmetic_2ENUMERAL$ to be $\lambda V0x \in ty_2Enum_2Enum.V0x$.

Let $ty_2Einteger_2Eint : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Einteger_2Eint \quad (7)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_of_num : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_of_num \in (ty_2Einteger_2Eint^{ty_2Enum_2Enum}) \quad (8)$$

Let $ty_2Epair_2Eprod : \iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota$ be given. Assume the following.

$$\forall A0.nonempty\ A0 \Rightarrow \forall A1.nonempty\ A1 \Rightarrow nonempty\ (ty_2Epair_2Eprod\ A0\ A1) \quad (9)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})^{ty_2Einteger_2Eint}) \quad (10)$$

Definition 9 We define $c_2Emin_2E_40$ to be $\lambda A.\lambda P \in 2^A$. **if** $(\exists x \in A.p (ap\ P\ x))$ **then** (the $(\lambda x.x \in A \wedge p\ x)$ of type $\iota \Rightarrow \iota$).

Definition 10 We define $c_2Einteger_2Eint_REP$ to be $\lambda V0a \in ty_2Einteger_2Eint.(ap\ (c_2Emin_2E_40\ ty_2Einteger_2Eint_REP_CLASS))$

Let $c_2Einteger_2Etint_neg : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Etint_neg \in ((ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (11)$$

Let $c_2Einteger_2Etint_eq : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Etint_eq \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (12)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_ABS_CLASS : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_ABS_CLASS \in (ty_2Einteger_2Eint^{(2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})}) \quad (13)$$

Definition 11 We define $c_2Einteger_2Eint_ABS$ to be $\lambda V0r \in (ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)$

Definition 12 We define $c_2Einteger_2Eint_neg$ to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.(ap\ c_2Einteger_2Eint_neg)$

Let $c_2Einteger_2Etint_lt : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Etint_lt \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (14)$$

Definition 13 We define $c_2Einteger_2Eint_lt$ to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.\lambda V1T2 \in ty_2Einteger$.

Definition 14 We define c_2Ebool_2EF to be $(ap\ (c_2Ebool_2E_21\ 2))\ (\lambda V0t \in 2.V0t)$.

Definition 15 We define $c_2Emin_2E_3D_3D_3E$ to be $\lambda P \in 2.\lambda Q \in 2.inj_o\ (p\ P \Rightarrow p\ Q)$ of type ι .

Definition 16 We define $c_2Ebool_2E_2F_5C$ to be $(\lambda V0t1 \in 2.(\lambda V1t2 \in 2.(ap\ (c_2Ebool_2E_21\ 2))\ (\lambda V2t \in 2.V2t)))$

Definition 17 We define c_2Ebool_2ECOND to be $\lambda A_27a : \iota.(\lambda V0t \in 2.(\lambda V1t1 \in A_27a.(\lambda V2t2 \in A_27a.(ap\ (c_2Ebool_2E_21\ 2))\ (\lambda V3t3 \in 2.V3t3))))$

Definition 18 We define $c_2EintExtension_2ESGN$ to be $\lambda V0x \in ty_2Einteger_2Eint.(ap\ (ap\ (ap\ (c_2Ebool_2E_21\ 2))\ (\lambda V1t \in 2.V1t))\ (\lambda V2t \in 2.V2t)))$

Let $ty_2Efrac_2Efrac : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Efrac_2Efrac \quad (15)$$

Let $c_2Efrac_2Erep_frac : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Efrac_2Erep_frac \in ((ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Einteger_2Eint\ ty_2Einteger_2Eint)^{ty_2Efrac_2Efrac}) \quad (16)$$

Let $c_2Epair_2EFST : \iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota$ be given. Assume the following.

$$\forall A_27a.nonempty\ A_27a \Rightarrow \forall A_27b.nonempty\ A_27b \Rightarrow c_2Epair_2EFST\ A_27a\ A_27b \in (A_27a\ A_27b \in (A_27a\ A_27b)^{(ty_2Epair_2Eprod\ A_27a\ A_27b)}) \quad (17)$$

Definition 19 We define $c_2Efrac_2Efrac_nmr$ to be $\lambda V0f \in ty_2Efrac_2Efrac.(ap\ (c_2Epair_2EFST\ ty_2Efrac_2Efrac\ ty_2Efrac_2Efrac))$

Definition 20 We define $c_2Efrac_2Efrac_sgn$ to be $\lambda V0f1 \in ty_2Efrac_2Efrac.(ap\ c_2EintExtension_2ESGN\ ty_2Efrac_2Efrac\ ty_2Efrac_2Efrac)$

Definition 21 We define $c_2Einteger_2EABS$ to be $\lambda V0n \in ty_2Einteger_2Eint.(ap\ (ap\ (ap\ (c_2Ebool_2E_21\ 2))\ (\lambda V1t \in 2.V1t))\ (\lambda V2t \in 2.V2t)))$

Let $c_2Epair_2ESND : \iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota$ be given. Assume the following.

$$\forall A_27a.nonempty\ A_27a \Rightarrow \forall A_27b.nonempty\ A_27b \Rightarrow c_2Epair_2ESND\ A_27a\ A_27b \in (A_27a\ A_27b \in (A_27b)^{(ty_2Epair_2Eprod\ A_27a\ A_27b)}) \quad (18)$$

Definition 22 We define $c_2Efrac_2Efrac_dnm$ to be $\lambda V0f \in ty_2Efrac_2Efrac.(ap\ (c_2Epair_2ESND\ ty_2Efrac_2Efrac\ ty_2Efrac_2Efrac))$

Let $c_2Einteger_2Etint_mul : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Etint_mul \in (((ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (19)$$

Definition 23 We define $c_2Einteger_2Eint_mul$ to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.\lambda V1T2 \in ty_2Einteger$
Let $c_2Epair_2EABS_prod : \iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota$ be given. Assume the following.

$$\forall A_27a.nonempty\ A_27a \Rightarrow \forall A_27b.nonempty\ A_27b \Rightarrow c_2Epair_2EABS_prod\ A_27a\ A_27b \in ((ty_2Epair_2Eprod\ A_27a\ A_27b)^{(2^{A_27b})^{A_27a}})$$
(20)

Definition 24 We define $c_2Epair_2E_2C$ to be $\lambda A_27a : \iota.\lambda A_27b : \iota.\lambda V0x \in A_27a.\lambda V1y \in A_27b.(ap\ (c_2E$
Let $c_2Efrac_2Eabs_frac : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Efrac_2Eabs_frac \in (ty_2Efrac_2Efrac^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Einteger_2Eint\ ty_2Einteger_2Eint)})$$
(21)

Definition 25 We define $c_2Efrac_2Efrac_minv$ to be $\lambda V0f1 \in ty_2Efrac_2Efrac.(ap\ c_2Efrac_2Eabs_frac$

Definition 26 We define $c_2Efrac_2Efrac_mul$ to be $\lambda V0f1 \in ty_2Efrac_2Efrac.\lambda V1f2 \in ty_2Efrac_2Efrac$

Definition 27 We define $c_2Efrac_2Efrac_div$ to be $\lambda V0f1 \in ty_2Efrac_2Efrac.\lambda V1f2 \in ty_2Efrac_2Efrac$

Definition 28 We define $c_2Ebool_2E_7E$ to be $(\lambda V0t \in 2.(ap\ (ap\ c_2Emin_2E_3D_3D_3E\ V0t)\ c_2Ebool_2E$
Assume the following.

$$True$$
(22)

Assume the following.

$$\forall A_27a.nonempty\ A_27a \Rightarrow (\forall V0x \in A_27a.((V0x = V0x) \Leftrightarrow True))$$
(23)

Assume the following.

$$\begin{aligned} & (\forall V0a \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V1b \in ty_2Einteger_2Eint. \\ & ((p\ (ap\ (ap\ c_2Einteger_2Eint_lt\ (ap\ c_2Einteger_2Eint_of_num \\ & c_2Enum_2E0))\ V1b)) \Rightarrow ((ap\ c_2Efrac_2Efrac_nmr\ (ap\ c_2Efrac_2Eabs_frac \\ & (ap\ (ap\ (c_2Epair_2E_2C\ ty_2Einteger_2Eint\ ty_2Einteger_2Eint) \\ & V0a)\ V1b))) = V0a)))) \end{aligned}$$
(24)

Assume the following.

$$\begin{aligned} & (\forall V0a \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V1b \in ty_2Einteger_2Eint. \\ & ((p\ (ap\ (ap\ c_2Einteger_2Eint_lt\ (ap\ c_2Einteger_2Eint_of_num \\ & c_2Enum_2E0))\ V1b)) \Rightarrow ((ap\ c_2Efrac_2Efrac_dnm\ (ap\ c_2Efrac_2Eabs_frac \\ & (ap\ (ap\ (c_2Epair_2E_2C\ ty_2Einteger_2Eint\ ty_2Einteger_2Eint) \\ & V0a)\ V1b))) = V1b)))) \end{aligned}$$
(25)

Assume the following.

$$\begin{aligned} & (\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint.((\neg(V0x = (ap\ c_2Einteger_2Eint_of_num \\ & c_2Enum_2E0))) \Rightarrow (p\ (ap\ (ap\ c_2Einteger_2Eint_lt\ (ap\ c_2Einteger_2Eint_of_num \\ & c_2Enum_2E0))\ (ap\ c_2Einteger_2EABS\ V0x)))) \end{aligned}$$
(26)

Assume the following.

$$\begin{aligned}
& (\forall V0y \in ty_2Einteger_2Eint. (\forall V1x \in ty_2Einteger_2Eint. \\
& ((ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul V1x) V0y) = (ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul \\
& \quad V0y) V1x))))
\end{aligned} \tag{27}$$

Assume the following.

$$\begin{aligned}
& (\forall V0z \in ty_2Einteger_2Eint. (\forall V1y \in ty_2Einteger_2Eint. \\
& (\forall V2x \in ty_2Einteger_2Eint. ((ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul \\
& V2x) (ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul V1y) V0z)) = (ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul \\
& \quad (ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul V2x) V1y)) V0z))))))
\end{aligned} \tag{28}$$

Theorem 1

$$\begin{aligned}
& (\forall V0a1 \in ty_2Einteger_2Eint. (\forall V1b1 \in ty_2Einteger_2Eint. \\
& (\forall V2a2 \in ty_2Einteger_2Eint. (\forall V3b2 \in ty_2Einteger_2Eint. \\
& ((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_lt (ap c_2Einteger_2Eint_of_num \\
& c_2Enum_2E0)) V1b1)) \Rightarrow ((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_lt (ap c_2Einteger_2Eint_of_num \\
& c_2Enum_2E0)) V3b2)) \Rightarrow ((\neg (V2a2 = (ap c_2Einteger_2Eint_of_num \\
& c_2Enum_2E0))) \Rightarrow ((ap (ap c_2Efrac_2Efrac_div (ap c_2Efrac_2Eabs_frac \\
& \quad (ap (ap (c_2Epair_2E_2C ty_2Einteger_2Eint ty_2Einteger_2Eint) \\
& \quad V0a1) V1b1))) (ap c_2Efrac_2Eabs_frac (ap (ap (c_2Epair_2E_2C \\
& ty_2Einteger_2Eint ty_2Einteger_2Eint) V2a2) V3b2))) = (ap c_2Efrac_2Eabs_frac \\
& \quad (ap (ap (c_2Epair_2E_2C ty_2Einteger_2Eint ty_2Einteger_2Eint) \\
& \quad (ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul (ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul \\
& V0a1) (ap c_2EintExtension_2ESGN V2a2)))) V3b2)) (ap (ap c_2Einteger_2Eint_mul \\
& \quad V1b1) (ap c_2Einteger_2EABS V2a2))))))))))
\end{aligned}$$