

thm_2Eint_arith_2Elt_move_all_left (TMG- Gzo5AZ266awPUyT2KkVuH7p3aYFXTruf)

October 26, 2020

Definition 1 We define c_2Emin_2E3D to be $\lambda A.\lambda x \in A.\lambda y \in A.inj_o (x = y)$ of type $\iota \Rightarrow \iota$.

Definition 2 We define c_2Ebool_2ET to be $(ap (ap (c_2Emin_2E3D (2^2))) (\lambda V0x \in 2.V0x)) (\lambda V1x \in 2.V1x)$

Let $c_2Enum_2EZERO_REP : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Enum_2EZERO_REP \in \omega \tag{1}$$

Let $ty_2Enum_2Enum : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Enum_2Enum \tag{2}$$

Let $c_2Enum_2EABS_num : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Enum_2EABS_num \in (ty_2Enum_2Enum^{\omega}) \tag{3}$$

Definition 3 We define c_2Enum_2E0 to be $(ap\ c_2Enum_2EABS_num\ c_2Enum_2EZERO_REP)$.

Let $ty_2Einteger_2Eint : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Einteger_2Eint \tag{4}$$

Let $c_2Einteger_2Eint_of_num : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_of_num \in (ty_2Einteger_2Eint^{ty_2Enum_2Enum}) \tag{5}$$

Let $ty_2Epair_2Eprod : \iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota$ be given. Assume the following.

$$\forall A0.nonempty\ A0 \Rightarrow \forall A1.nonempty\ A1 \Rightarrow nonempty\ (ty_2Epair_2Eprod\ A0\ A1) \tag{6}$$

Let $c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})\ ty_2Einteger_2Eint) \tag{7}$$

Definition 4 We define `c_2Emin_2E_40` to be $\lambda A.\lambda P \in 2^A.$ **if** $(\exists x \in A.p (ap P x))$ **then** (the $(\lambda x.x \in A \wedge p$ of type $\iota \Rightarrow \iota$).

Definition 5 We define `c_2Ebool_2E_21` to be $\lambda A_27a : \iota.(\lambda V0P \in (2^{A_27a}).(ap (ap (c_2Emin_2E_3D (2^{A_27a}.$

Definition 6 We define `c_2Einteger_2Eint__REP` to be $\lambda V0a \in ty_2Einteger_2Eint.(ap (c_2Emin_2E_40 (ty$

Let `c_2Einteger_2Eint__neg` : ι be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_neg \in ((ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)_{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (8)$$

Let `c_2Einteger_2Eint__eq` : ι be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_eq \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})_{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (9)$$

Let `c_2Einteger_2Eint__ABS__CLASS` : ι be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_ABS_CLASS \in (ty_2Einteger_2Eint)^{(2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})} \quad (10)$$

Definition 7 We define `c_2Einteger_2Eint__ABS` to be $\lambda V0r \in (ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)$

Definition 8 We define `c_2Einteger_2Eint__neg` to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.(ap\ c_2Einteger_2Eint_neg$

Let `c_2Einteger_2Eint__add` : ι be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_add \in (((ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)_{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})_{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (11)$$

Definition 9 We define `c_2Einteger_2Eint__add` to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.\lambda V1T2 \in ty_2Einteger$

Let `c_2Einteger_2Eint__lt` : ι be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_lt \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})_{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (12)$$

Definition 10 We define `c_2Einteger_2Eint__lt` to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.\lambda V1T2 \in ty_2Einteger$

Assume the following.

$$True \quad (13)$$

Assume the following.

$$\forall A_27a.nonempty\ A_27a \Rightarrow (\forall V0t \in 2.((\forall V1x \in A_27a.(p\ V0t)) \Leftrightarrow (p\ V0t))) \quad (14)$$

Assume the following.

$$\forall A_27a.nonempty\ A_27a \Rightarrow (\forall V0x \in A_27a.((V0x = V0x) \Leftrightarrow True)) \quad (15)$$

Assume the following.

$$(\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint.((ap (ap c_2Einteger_2Eint_add (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)) V0x) = V0x)) \quad (16)$$

Assume the following.

$$(\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V1y \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V2z \in ty_2Einteger_2Eint.((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_lt (ap (ap c_2Einteger_2Eint_add V0x) (ap c_2Einteger_2Eint_neg V1y))) V2z)) \Leftrightarrow (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_lt V0x) (ap (ap c_2Einteger_2Eint_add V2z) V1y)))))))) \quad (17)$$

Theorem 1

$$(\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V1y \in ty_2Einteger_2Eint.((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_lt V0x) V1y)) \Leftrightarrow (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_lt (ap (ap c_2Einteger_2Eint_add V0x) (ap c_2Einteger_2Eint_neg V1y))) (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)))))))$$