

thm_2Einteger_2EINT__LE__ADD
(TMQh91M1S945EjcQit8QKXbqgu6A9vMA29Q)

October 26, 2020

Definition 1 We define $c_2Emin_2E_3D$ to be $\lambda A.\lambda x \in A.\lambda y \in A.inj_o (x = y)$ of type $\iota \Rightarrow \iota$.

Definition 2 We define $c_2Ebool_2E_ET$ to be $(ap (ap (c_2Emin_2E_3D (2^2)) (\lambda V0x \in 2.V0x)) (\lambda V1x \in 2.V1x))$

Definition 3 We define $c_2Ebool_2E_21$ to be $\lambda A_27a : \iota.(\lambda V0P \in (2^{A-27a}).(ap (ap (c_2Emin_2E_3D (2^{A-27a})) (\lambda V1P \in 2.V1P)) (\lambda V2P \in 2.V2P))$

Definition 4 We define $c_2Ebool_2E_EF$ to be $(ap (c_2Ebool_2E_21 2) (\lambda V0t \in 2.V0t))$.

Definition 5 We define $c_2Emin_2E_3D_3D_3E$ to be $\lambda P \in 2.\lambda Q \in 2.inj_o (p \Rightarrow q)$ of type ι .

Definition 6 We define $c_2Ebool_2E_7E$ to be $(\lambda V0t \in 2.(ap (ap c_2Emin_2E_3D_3D_3E V0t) c_2Ebool_2E_EF))$

Let $c_2Enum_2EZERO_REP : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Enum_2EZERO_REP \in \omega \tag{1}$$

Let $ty_2Enum_2Enum : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Enum_2Enum \tag{2}$$

Let $c_2Enum_2EABS_num : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Enum_2EABS_num \in (ty_2Enum_2Enum^{\omega}) \tag{3}$$

Definition 7 We define c_2Enum_2E0 to be $(ap c_2Enum_2EABS_num c_2Enum_2EZERO_REP)$.

Let $ty_2Einteger_2Eint : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Einteger_2Eint \tag{4}$$

Let $c_2Einteger_2Eint_of_num : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_of_num \in (ty_2Einteger_2Eint^{ty_2Enum_2Enum}) \tag{5}$$

Let $ty_2Epair_2Eprod : \iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota$ be given. Assume the following.

$$\forall A0.nonempty\ A0 \Rightarrow \forall A1.nonempty\ A1 \Rightarrow nonempty\ (ty_2Epair_2Eprod\ A0\ A1) \quad (6)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})^{ty_2Einteger_2Eint_REP_CLASS}) \quad (7)$$

Definition 8 We define $c_2Emin_2E_40$ to be $\lambda A.\lambda P \in 2^A$. **if** $(\exists x \in A.p\ (ap\ P\ x))$ **then** (the $(\lambda x.x \in A \wedge p\ x)$ of type $\iota \Rightarrow \iota$).

Definition 9 We define $c_2Einteger_2Eint_REP$ to be $\lambda V0a \in ty_2Einteger_2Eint$. $(ap\ (c_2Emin_2E_40\ (ty_2Einteger_2Eint_REP\ a)))$

Let $c_2Einteger_2Eint_add : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_add \in (((ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)^{ty_2Einteger_2Eint_add})^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (8)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_eq : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_eq \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (9)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_ABS_CLASS : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_ABS_CLASS \in (ty_2Einteger_2Eint)^{(2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})} \quad (10)$$

Definition 10 We define $c_2Einteger_2Eint_ABS$ to be $\lambda V0r \in (ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)$

Definition 11 We define $c_2Einteger_2Eint_add$ to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint$. $\lambda V1T2 \in ty_2Einteger_2Eint$

Let $c_2Einteger_2Eint_lt : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_lt \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)}) \quad (11)$$

Definition 12 We define $c_2Einteger_2Eint_lt$ to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint$. $\lambda V1T2 \in ty_2Einteger_2Eint$

Definition 13 We define $c_2Einteger_2Eint_le$ to be $\lambda V0x \in ty_2Einteger_2Eint$. $\lambda V1y \in ty_2Einteger_2Eint$

Definition 14 We define $c_2Ebool_2E_2F_5C$ to be $(\lambda V0t1 \in 2.(\lambda V1t2 \in 2.(ap\ (c_2Ebool_2E_21\ 2)\ (\lambda V2t \in 2.((True \Rightarrow (p\ V0t)) \Leftrightarrow (p\ V0t)) \wedge (((p\ V0t) \Rightarrow True) \Leftrightarrow True) \wedge (((False \Rightarrow (p\ V0t)) \Leftrightarrow True) \wedge (((p\ V0t) \Rightarrow (p\ V0t)) \Leftrightarrow True) \wedge ((p\ V0t) \Rightarrow False) \Leftrightarrow (\neg(p\ V0t))))))$

Assume the following.

$$True \quad (12)$$

Assume the following.

$$\begin{aligned} & (\forall V0t \in 2.(((True \Rightarrow (p\ V0t)) \Leftrightarrow (p\ V0t)) \wedge (((p\ V0t) \Rightarrow True) \Leftrightarrow True) \wedge (((False \Rightarrow (p\ V0t)) \Leftrightarrow True) \wedge (((p\ V0t) \Rightarrow (p\ V0t)) \Leftrightarrow True) \wedge ((p\ V0t) \Rightarrow False) \Leftrightarrow (\neg(p\ V0t)))))) \quad (13) \end{aligned}$$

Assume the following.

$$(\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint.((ap (ap c_2Einteger_2Eint_add (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)) V0x) = V0x)) \quad (14)$$

Assume the following.

$$(\forall V0w \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V1x \in ty_2Einteger_2Eint. (\forall V2y \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V3z \in ty_2Einteger_2Eint. (((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le V0w) V1x)) \wedge (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le V2y) V3z)))) \Rightarrow (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le (ap (ap c_2Einteger_2Eint_add V0w) V2y)) (ap (ap c_2Einteger_2Eint_add V1x) V3z)))))))))) \quad (15)$$

Theorem 1

$$(\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint.(\forall V1y \in ty_2Einteger_2Eint. (((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)) V0x)) \wedge (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)) V1y)))) \Rightarrow (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)) (ap (ap c_2Einteger_2Eint_add V0x) V1y))))))$$