

thm_2Einteger_2EINT__LE__NEGR (TMGWDt- GSV5a98RbmBd89pBAvmMsBprvjbK2)

October 26, 2020

Definition 1 We define c_2Emin_2E3D to be $\lambda A.\lambda x \in A.\lambda y \in A.inj_o (x = y)$ of type $\iota \Rightarrow \iota$.

Definition 2 We define c_2Ebool_2ET to be $(ap (ap (c_2Emin_2E3D (2^2))) (\lambda V0x \in 2.V0x)) (\lambda V1x \in 2.V1x)$

Let $c_2Enum_2EZERO_REP : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Enum_2EZERO_REP \in \omega \tag{1}$$

Let $ty_2Enum_2Enum : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Enum_2Enum \tag{2}$$

Let $c_2Enum_2EABS_num : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Enum_2EABS_num \in (ty_2Enum_2Enum^{\omega}) \tag{3}$$

Definition 3 We define c_2Enum_2E0 to be $(ap\ c_2Enum_2EABS_num\ c_2Enum_2EZERO_REP)$.

Let $ty_2Einteger_2Eint : \iota$ be given. Assume the following.

$$nonempty\ ty_2Einteger_2Eint \tag{4}$$

Let $c_2Einteger_2Eint_of_num : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_of_num \in (ty_2Einteger_2Eint^{ty_2Enum_2Enum}) \tag{5}$$

Let $ty_2Epair_2Eprod : \iota \Rightarrow \iota \Rightarrow \iota$ be given. Assume the following.

$$\forall A0.nonempty\ A0 \Rightarrow \forall A1.nonempty\ A1 \Rightarrow nonempty\ (ty_2Epair_2Eprod\ A0\ A1) \tag{6}$$

Let $c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_REP_CLASS \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod\ ty_2Enum_2Enum\ ty_2Enum_2Enum)})\ ty_2Einteger_2Eint) \tag{7}$$

Definition 4 We define $c_2Emin_2E_40$ to be $\lambda A.\lambda P \in 2^A.$ **if** $(\exists x \in A.p (ap P x))$ **then** *(the* $(\lambda x.x \in A \wedge p)$ *of type* $\iota \Rightarrow \iota$.

Definition 5 We define $c_2Ebool_2E_21$ to be $\lambda A_27a : \iota.(\lambda V0P \in (2^{A_27a}).(ap (ap (c_2Emin_2E_3D (2^{A_27a})))$

Definition 6 We define $c_2Einteger_2Eint_REP$ to be $\lambda V0a \in ty_2Einteger_2Eint.(ap (c_2Emin_2E_40 (ty$

Let $c_2Einteger_2Eint_neg : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_neg \in ((ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)_{(ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)}) \quad (8)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_eq : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_eq \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)})_{(ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)}) \quad (9)$$

Let $c_2Einteger_2Eint_ABS_CLASS : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_ABS_CLASS \in (ty_2Einteger_2Eint)^{(2^{(ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)})} \quad (10)$$

Definition 7 We define $c_2Einteger_2Eint_ABS$ to be $\lambda V0r \in (ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)$

Definition 8 We define $c_2Einteger_2Eint_neg$ to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.(ap c_2Einteger_2Eint_neg$

Let $c_2Einteger_2Eint_lt : \iota$ be given. Assume the following.

$$c_2Einteger_2Eint_lt \in ((2^{(ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)})_{(ty_2Epair_2Eprod ty_2Enum_2Enum ty_2Enum_2Enum)}) \quad (11)$$

Definition 9 We define $c_2Einteger_2Eint_lt$ to be $\lambda V0T1 \in ty_2Einteger_2Eint.\lambda V1T2 \in ty_2Einteger_2Eint$

Definition 10 We define $c_2Ebool_2E_2F$ to be $(ap (c_2Ebool_2E_21 2) (\lambda V0t \in 2.V0t))$.

Definition 11 We define $c_2Emin_2E_3D_3D_3E$ to be $\lambda P \in 2.\lambda Q \in 2.inj_o (p P \Rightarrow p Q)$ *of type* ι .

Definition 12 We define $c_2Ebool_2E_7E$ to be $(\lambda V0t \in 2.(ap (ap c_2Emin_2E_3D_3D_3E V0t) c_2Ebool_2E_7E$

Definition 13 We define $c_2Einteger_2Eint_le$ to be $\lambda V0x \in ty_2Einteger_2Eint.\lambda V1y \in ty_2Einteger_2Eint$

Assume the following.

$$True \quad (12)$$

Assume the following.

$$\forall A_27a.nonempty A_27a \Rightarrow (\forall V0x \in A_27a.((V0x = V0x) \Leftrightarrow True)) \quad (13)$$

Assume the following.

$$(\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint.((ap c_2Einteger_2Eint_neg (ap c_2Einteger_2Eint_neg V0x)) = V0x)) \quad (14)$$

Assume the following.

$$\begin{aligned}
 & (\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint. ((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le \\
 & (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)) (ap c_2Einteger_2Eint_neg \\
 & V0x))) \Leftrightarrow (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le V0x) (ap c_2Einteger_2Eint_of_num \\
 & c_2Enum_2E0))))))
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

Assume the following.

$$\begin{aligned}
 & (\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint. ((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le \\
 & (ap c_2Einteger_2Eint_neg V0x)) V0x)) \Leftrightarrow (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le \\
 & (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0)) V0x))))
 \end{aligned}
 \tag{16}$$

Theorem 1

$$\begin{aligned}
 & (\forall V0x \in ty_2Einteger_2Eint. ((p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le \\
 & V0x) (ap c_2Einteger_2Eint_neg V0x))) \Leftrightarrow (p (ap (ap c_2Einteger_2Eint_le \\
 & V0x) (ap c_2Einteger_2Eint_of_num c_2Enum_2E0))))))
 \end{aligned}$$